CHAPITRE XI

SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS LINÉAIRES

Table des matières

ECG 2 Maths appliquées, http://louismerlin.fr.

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

1. Equations différentielles linéaires à coefficients constants

Définition : Équation différentielle linéaire à coefficients constants.

On appelle *équation différentielle linéaire à coefficients constants* toute équation différentielle de la forme

$$(E) \qquad a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b$$

où

- $n \in \mathbb{N}^*$
- a_0, a_1, ..., a_n sont des constantes, appelées **coefficients** de l'équation différentielle
- $t \mapsto b(t)$ est une fonction (a priori non constante) définie sur I, appelée **second membre**

Si la fonction b est nulle, on dit que l'équation est **homogène**.
Si $a_n \neq 0$, on dit que l'équation est **d'ordre** n.

En général, on note (E_0) l'équation différentielle homogène associée :

$$(E_0) \qquad a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Définition : Équilibre

On appelle **équilibre** toute solution constante.

Exemple 1.0.1.

1. $y' = y$ est
   - linéaire
   - à coefficients constants
   - homogène
   - d'ordre 1
2. $y'' - y = 0$ est
   - linéaire
   - à coefficients constants
   - homogène
   - d'ordre 2
3. $y' = 2y + 5$ est
   - linéaire
   - à coefficients constants
   - non homogène
   - d'ordre 1
4. $y' = y^2$ est
   - non linéaire
   - d'ordre 1
5. $y' + ty = 1 + t^2$ est
   - linéaire
   - à coefficients non constants (t n'est pas une constante)
   - non homogène
   - d'ordre 1
6. $y''' + y'' + y' + y = e^t$ est
   - linéaire
   - à coefficients constants
   - non homogène
   - d'ordre 3

Théorème : Principe de superposition

Soient

$$(E_1) \qquad a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b_1$$

et

(E_2) $$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b_2$$

deux équations différentielles linéaires à coefficients constants différant seulement par leur second membre.

Soit y_1 une solution de (E_1) et y_2 une solution de (E_2). Alors $y_1 + y_2$ est une solution de l'équation différentielle

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b_1 + b_2$$

Exemple 1.0.2. La fonction $y_1 : t \mapsto -1$ est solution de l'équation différentielle $y' - y = 1$ et la fonction $y_2 : t \mapsto te^t$ est solution de l'équation différentielle $y' - y = e^t$. D'après le principe de superposition, la fonction $f = y_1 + y_2 : t \mapsto -1 + te^t$ est solution de l'équation différentielle $y' - y = 1 + e^t$. On peut le vérifier facilement par le calcul.

Le principe de superposition dit en substance que

$$\boxed{\text{résoudre l'équation différentielle } (E) \iff \begin{cases} \text{résoudre l'équation différentielle homogène } (E_0) \\ \text{et} \\ \text{trouver une solution particulière de } (E) \end{cases}}$$

2. Equations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 1

2.1. Définition.

Définition :

On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre** 1 **à coefficients constants** toute équation différentielle de la forme

(E) $$y' + ay = b$$

où

- $a \in \mathbb{R}^*$ est une constante non nulle
- b est une fonction continue sur I (a priori non constante)

Remarque 2.1.1. Si $a = 0$, résoudre l'équation différentielle revient à calculer une primitive de b.

2.2. Le cas homogène.

Théorème : Solutions de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1.

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 à coefficients constants $(E_0) : y' + ay = 0$ est

$$\boxed{S_0 = \left\{t \mapsto Ce^{-at} \mid C \in \mathbb{R}\right\}}$$

Pour le dire autrement, y est une solution de (E_0) si et seulement si il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y(t) = Ce^{-at}$. En particulier, on remarque qu'il existe une infinité de solutions.

Remarque 2.2.1. Attention au signe moins.

Exercice 2.2.2. Résoudre les équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 1 à coefficients constants suivantes.

1. $y' = 2y$ **2.** $y' - 3y = 0$ **3.** $y' + 4y = 0$

Définition : Problème de Cauchy pour une équation différentielle d'ordre 1

Soit $c \in \mathbb{R}$. Résoudre le **problème de Cauchy**

$$\begin{cases} y' + ay = 0 \\ y(0) = c \end{cases}$$

c'est trouver les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ qui vérifient la condition initiale $y(0) = c$.

Théorème : Existence et unicité d'une solution au problème de Cauchy

Soit $c \in \mathbb{R}$. On considère le problème de Cauchy

$$(P_0) \qquad \begin{cases} y' + ay = 0 \\ y(0) = c \end{cases}$$

Il existe une unique solution au problème de Cauchy (P_0), qui est la fonction

$$f : t \mapsto ce^{-at}$$

Remarque 2.2.3. L'équation différentielle $y' + ay = 0$ possède une infinité de solutions mais il n'en reste plus qu'une lorsqu'on fixe la condition initiale. Ainsi, si deux solutions de $y' + ay = 0$ vérifient la même condition initiale, alors elles sont identiques.

Exercice 2.2.4. Résoudre les problèmes de Cauchy suivants.

1. $\begin{cases} y' + 10y = 0 \\ y(0) = 10 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} y' - 7y = 0 \\ y(0) = -3 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} y' = 8y \\ y(0) = -1 \end{cases}$

2.3. **Point de vue algébrique sur l'équation différentielle homogène.** L'ensemble des solutions

$$S_0 = \left\{ t \mapsto Ce^{-at} \mid C \in \mathbb{R} \right\}$$

peut se réécrire

$$S_0 = \mathrm{Vect} f$$

où $f : t \mapsto e^{-at}$. Cette écriture montre que S_0 est un sous-espace vectoriel de dimension 1 de l'espace vectoriel $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Considérons l'application linéaire

$$\Phi : \left| \begin{array}{ccc} S_0 & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & y(0) \end{array} \right.$$

Le théorème d'existence et d'unicité d'une solution au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' + ay = 0 \\ y(0) = c \end{cases}$$

se reformule en disant que l'application Φ est bijective :

$$\begin{array}{rcl} \text{existence} & \leftrightarrow & \text{surjectivité} \\ \text{unicité} & \leftrightarrow & \text{injectivité} \end{array}$$

Ainsi, $\boxed{\Phi \text{ est un isomorphisme d'espaces vectoriels}}$.

2.4. **Recherche d'une solution particulière : la méthode de variation de la constante.**

Méthode : variation de la constante

Considérons une solution $f : t \mapsto Ce^{-at}$ de l'équation différentielle homogène (E_0). Comme son nom l'indique, la méthode consiste à faire varier la constante C pour trouver une solution particulière de l'équation différentielle avec second membre (E). Plus précisément, on considère finalement la fonction

$$f : t \mapsto C(t)e^{-at} \qquad \text{(la constante } C \text{ n'en est plus une, elle dépend maintenant de } t\text{)}$$

et on suppose que la fonction $t \mapsto C(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par dérivation d'un produit, on obtient, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f'(t) = C'(t)e^{-at} - aC(t)e^{-at} = C'(t)e^{-at} - af(t)$$

d'où les équivalences :

$$\begin{aligned} f \text{ est solution de } (E) &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) + af(t) = b(t) \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad C'(t)e^{-at} - \cancel{af(t)} + \cancel{af(t)} = b(t) \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad C'(t) = b(t)e^{at} \\ &\iff \text{la fonction } C \text{ est une primitive de la fonction } t \mapsto b(t)e^{at} \text{ sur } \mathbb{R} \end{aligned}$$

Or, par hypothèse, b est continue sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $t \mapsto b(t)e^{at}$ est également continue sur $\mathbb{R}$ et donc elle admet une primitive sur $\mathbb{R}$. Notons $t \mapsto k(t)$ une telle primitive. Ainsi, la fonction

$$f : t \mapsto k(t)e^{-at}$$

est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

Remarque 2.4.1. Il faudra refaire le raisonnement précédent à chaque fois que l'on souhaite trouver une solution particulière pour savoir quelle primitive calculer. De plus, il faut se souvenir que la fonction

$$t \mapsto \int_0^t b(x)e^{ax}dx$$

est l'unique primitive de $t \mapsto b(t)e^{at}$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. On peut donc calculer une primitive en calculant une intégrale (on a alors accès aux techniques usuelles de calcul : IPP et changement de variable).

Remarque 2.4.2. La méthode de la variation de la constante montre qu'il existe toujours une solution de l'équation différentielle $(E) : y' + ay = b$ lorsque la fonction b est continue.

Exemple 2.4.3. On cherche à trouver une solution particulière de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants $(E) : y' + 2y = 1 + t$. D'après le cours, les solutions de l'équation différentielle homogène $(E_0) : y' + 2y = 0$ sont de la forme

$$t \mapsto Ce^{-2t}$$

où $C \in \mathbb{R}$. Soit $f : t \mapsto C(t)e^{-2t}$ où C est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f \text{ est solution de } (E) &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) + 2f(t) = 1 + t \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad C'(t)e^{-2t} - \cancel{2f(t)} + \cancel{2f(t)} = 1 + t \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad C'(t) = (1+t)e^{2t} \\ &\iff \text{la fonction } C \text{ est une primitive de la fonction } t \mapsto (1+t)e^{2t} \text{ sur } \mathbb{R} \end{aligned}$$

Soit $t \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \int_0^t (1+x)e^{2x}dx &= \int_0^t e^{2x}dx + \int_0^t xe^{2x}dx \\ &= \left(\frac{e^{2x}}{2}\right) + \int_0^t xe^{2x}dx \\ &= \frac{e^{2t}-1}{2} + \int_0^t xe^{2x}dx \end{aligned}$$

Pour calculer $\int_0^t xe^{2x}dx$, procédons par IPP :

$$\left| \begin{array}{ll} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^{2x} & v(x) = \dfrac{e^{2x}}{2} \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, t]$. D'où

$$\begin{aligned} \int_0^t xe^{2x}dx &= x\frac{e^{2x}2}{0}t - \int_0^t \frac{e^{2x}}{2}dx \\ &= t\frac{e^{2t}}{2} - \frac{e^{2x}}{4}0t \\ &= t\frac{e^{2t}}{2} - \frac{e^{2t}-1}{4} \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \int_0^t (1+x)e^{2x}dx &= \frac{e^{2t}-1}{2} + t\frac{e^{2t}}{2} - \frac{e^{2t}-1}{4} \\ &= t\frac{e^{2t}}{2} + \frac{e^{2t}}{2} - \frac{e^{2t}}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \\ &= t\frac{e^{2t}}{2} + \frac{e^{2t}}{4} - \frac{1}{4} \\ &= e^{2t}\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction $t \mapsto e^{2t}\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\right)$ est une primitive de la fonction $t \mapsto (1+t)e^{2t}$ sur $\mathbb{R}$ (on peut se débarrasser de la constante $-\frac{1}{4}$) et donc la fonction

$$f : t \mapsto \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}$$

est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

2.5. **Résolution complète.**

Théorème : Solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1

> Soit $(E) : y' + ay = b$ une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants. Soit y_p une solution particulière de (E). L'ensemble des solutions de (E) est
>
> $$\boxed{S = \{y_p + y_0 \mid y_0 \in S_0\} = \left\{t \mapsto y_p(t) + Ce^{-at} \mid C \in \mathbb{R}\right\}}$$

Démonstration. Notons :

- S l'ensemble des solutions de (E).
- S_0 l'ensemble des solutions de (E_0).
- y_p une solution particulière de (E) (donnée par exemple par la méthode de variation de la constante).

Soit $y \in S$. On a

- y est solution de $y' + ay = b$.
- $-y_p$ est solution de $y' + ay = -b$.

Par principe de superposition : $y - y_p$ est solution de $y' + ay = 0$. Donc il existe $y_0 \in S_0$ tel que $y - y_p = y_0$, *i.e.* $y = y_p + y_0$.
Réciproquement, soit $y_0 \in S_0$ et posons $y = y_p + y_0$. On a

- y_p est solution de $y' + ay = b$.
- y_0 est solution de $y' + ay = 0$.

Par principe de superposition, y est solution de $y' + ay = b$. Donc $y \in S$.
Par double inclusion, on a bien

$$S = \{y_p + y_0 \mid y_0 \in S_0\} = \left\{t \mapsto y_p(t) + Ce^{-at} \mid C \in \mathbb{R}\right\}$$

$\square$

Théorème : Existence et unicité d'une solution au problème de Cauchy

Soit $c \in \mathbb{R}$. On considère le problème de Cauchy

$$(P) \qquad \begin{cases} y' + ay = b \\ y(0) = c \end{cases}$$

Il existe une unique solution au problème de Cauchy (P).

Exemple 2.5.1. On cherche la solution du problème de Cauchy

$$(P) \qquad \begin{cases} y' + 2y = 1 + t \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

On a déjà trouvé une solution particulière

$$f : t \mapsto \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}$$

Les solutions générales sont donc de la forme

$$y : t \mapsto \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} + Ce^{-2t}, \qquad C \in \mathbb{R}$$

On a

$$\begin{aligned} y(0) = 0 &\iff \frac{1}{4} + C = 0 \\ &\iff C = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Ainsi, l'unique solution du problème de Cauchy (P) est $y : t \mapsto \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-2t}$.

2.6. **Compléments sur la recherche de solutions particulières.** On considère toujours dans ce paragraphe l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants

$$(E) : y' + ay = b$$

et on rappelle que $a \neq 0$.

Proposition : Solution particulière avec second membre constant.

Si b est une constante, alors l'équation différentielle (E) admet pour solution particulière la fonction constante

$$t \mapsto \frac{b}{a}$$

Cette solution particulière est l'unique équilibre de l'équation différentielle (E).

Proposition : Solution particulière avec second membre polynomial.

Si b est une fonction polynomiale, alors il existe une solution particulière de (E) qui soit également une fonction polynomiale, de même degré que b.

Proposition : Solution particulière avec second membre une exponentielle de polynôme.

On suppose que $b : t \mapsto Q(t)e^{\gamma t}$ où $\gamma \in \mathbb{R}$ et Q est une fonction polynomiale. Alors il existe une solution particulière de (E) qui soit de la forme

- $t \mapsto R(t)e^{\gamma t}$ si $\gamma \neq -a$
- $t \mapsto tR(t)e^{\gamma t}$ si $\gamma = -a$

où R est une fonction polynomiale de même degré que Q.

Exercice 2.6.1. Déterminer l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes :

1. $y' + 2y = 3$ **2.** $y' - y = t^2 + 1$ **3.** $y' + y = te^t$

Exercice 2.6.2. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y' - 3y = t\ln(t)e^{3t}$.

3. Équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 2

3.1. Définition.

Définition : Équation différentielle à coefficients constants d'ordre 2.

On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants** toute équation différentielle de la forme

$$(E) \qquad y'' + ay' + by = c$$

où

- $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$ sont deux constantes
- c est une fonction continue sur I (a priori non constante)

Remarque 3.1.1. Si $b = 0$, on se ramène à une équation différentielle d'ordre 1 en posant $z = y'$.

3.2. Le cas homogène.

Notons

$$(E_0) \qquad y'' + ay' + by = 0$$

l'équation différentielle homogène associée. On introduit le **polynôme caractéristique** :

$$\boxed{P(X) = X^2 + aX + b}$$

Remarque 3.2.1. Il faut voir que c'est analogue à la résolution des suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

Théorème : Solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2.

Notons Δ le discriminant du polynôme $P(X) = X^2 + aX + b$. Il y a trois cas possibles :

- Si $\Delta > 0$, alors le polynôme $P(X)$ admet deux racines distinctes notées r_1 et r_2. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène (E_0) est alors
$$\begin{aligned} S_0 &= \left\{t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \text{Vect}t \mapsto e^{r_1 t}, t \mapsto e^{r_2 t} \end{aligned}$$
- Si $\Delta = 0$, alors le polynôme $P(X)$ admet une unique racine notée r_0. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène (E_0) est alors
$$\begin{aligned} S_0 &= \left\{t \mapsto (\lambda t + \mu)e^{r_0 t} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \text{Vect}t \mapsto te^{r_0 t}, t \mapsto e^{r_0 t} \end{aligned}$$

- Si $\Delta < 0$, alors le polynôme $P(X)$ n'admet pas de racines réelles et on ne peut rien dire (cas hors-programme).

Exercice 3.2.2. Déterminer l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$ **2.** $y'' - 4y' + 4y = 0$ **3.** $y'' - 2y = 0$

Définition : Problème de Cauchy pour une équation différentielle d'ordre 2

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Résoudre le **problème de Cauchy**

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(0) = \alpha \\ y'(0) = \beta \end{cases}$$

c'est trouver les solutions de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ qui vérifient les deux conditions initiales $y(0) = \alpha$ et $y'(0) = \beta$.

Remarque 3.2.3. Pour une équation différentielle d'ordre n, il faut fixer n conditions initiales sur y et ses dérivées successives pour obtenir un problème de Cauchy bien posé. Toutes les conditions initiales doivent être considérées *au même instant*. On retiendra le tableau suivant pour savoir quelles sont les conditions initiales à fixer pour un problème de Cauchy.

Ordre	Condition initiale
1	$y(0)$
2	$y(0)$ et $y'(0)$
3	$y(0)$, $y'(0)$ et $y''(0)$
...	...

Théorème : Existence et unicité d'une solution au problème de Cauchy.

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On considère le problème de Cauchy

$$(P_0) \qquad \begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(0) = \alpha \\ y'(0) = \beta \end{cases}$$

Il existe une unique solution au problème de Cauchy (P_0). Plus précisément,

- Si $\Delta > 0$, alors le polynôme $P(X)$ admet deux racines distinctes notées r_1 et r_2. L'unique solution du problème de Cauchy (P_0) est la fonction
$$t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$$
où (λ, μ) est le couple solution du système linéaire
$$\begin{cases} y(0) = \alpha \\ y'(0) = \beta \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = \alpha \\ r_1 \lambda + r_2 \mu = \beta \end{cases}$$
- Si $\Delta = 0$, alors le polynôme $P(X)$ admet une unique racine notée r_0. L'unique solution du problème de Cauchy (P_0) est la fonction
$$t \mapsto (\lambda t + \mu) e^{r_0 t}$$
où (λ, μ) est le couple solution du système linéaire
$$\begin{cases} y(0) = \alpha \\ y'(0) = \beta \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = \alpha \\ \lambda + r_0 \mu = \beta \end{cases}$$

Exercice 3.2.4. Résoudre les problèmes de Cauchy suivants.

1. $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = 0 \\ y(0) = -3 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} y'' - 2y = 0 \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$

3.3. **Point de vue algébrique sur l'équation différentielle homogène.** Réécrivons le théorème qui décrit l'ensemble des solutions, en adoptant un point de vue algébrique

Théorème :

- Si $\Delta > 0$, alors
$$S_0 = \mathrm{Vect} t \mapsto e^{r_1 t}, t \mapsto e^{r_2 t}$$
- Si $\Delta = 0$, alors
$$S_0 = \mathrm{Vect} t \mapsto te^{r_0 t}, t \mapsto e^{r_0 t}$$

Cette écriture montre que S_0 est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de l'espace vectoriel $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.
Considérons l'application linéaire

$$\Phi : \left| \begin{array}{ccc} S_0 & \to & \mathbb{R}^2 \\ y & \mapsto & (y(0), y'(0)) \end{array} \right.$$

Le théorème d'existence et d'unicité d'une solution au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(0) = \alpha \\ y'(0) = \beta \end{cases}$$

se reformule en disant que l'application Φ est bijective :

$$\begin{array}{rcl} \text{existence} & \leftrightarrow & \text{surjectivité} \\ \text{unicité} & \leftrightarrow & \text{injectivité} \end{array}$$

Ainsi, $\boxed{\Phi \text{ est un isomorphisme d'espaces vectoriels}}$.

3.4. **Recherche d'une solution particulière : se laisser guider par l'énoncé.** Il n'y a pas de résultat à connaître : l'énoncé doit donner une indication.

Exemple 3.4.1. On considère l'équation différentielle $y'' + y' - 2y = (10 + 8t)e^{2t}$. Déterminer une solution particulière de la forme $t \mapsto cte^{2t}$ où $c \in \mathbb{R}$. (Solution : $c = 2$).

3.5. **Résolution complète.**

Théorème : Solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2.

Soit $(E) : y'' + ay' + by = c$ une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
Soit y_p une solution particulière de (E). L'ensemble des solutions de (E) est

$$\boxed{S = \{y_p + y_0 \mid y_0 \in S_0\}}$$

Théorème : Existence et unicité d'une solution au problème de Cauchy.

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On considère le problème de Cauchy

$$(P) \qquad \begin{cases} y'' + ay' + by = c \\ y(0) = \alpha \\ y'(0) = \beta \end{cases}$$

Il existe une unique solution au problème de Cauchy (P).

Exemple 3.5.1. Résoudre le problème de Cauchy

$$(P) \qquad \begin{cases} y'' + y' - 2y = (10+8t)e^{2t} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

On a vu que $t \mapsto 2te^{2t}$ était une solution particulière. Ainsi, les solutions générales sont de la forme

$$t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{-2t} + 2te^{2t}, \qquad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

On résout

$$\begin{aligned}
\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} &\iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} \lambda & + & \mu & & & = & 0 \\ \lambda & - & 2\mu & + & 2 & = & 1 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{ccccc} \lambda & + & \mu & = & 0 \\ \lambda & - & 2\mu & = & -1 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{ccccc} \lambda & + & \mu & = & 0 \\ & - & 3\mu & = & -1 \end{array} \right. \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\
&\iff \left\{ \begin{array}{ccccc} 3\lambda & & & = & -1 \\ & - & 3\mu & = & -1 \end{array} \right. \qquad L_1 \leftarrow 3L_1 + L_2 \\
&\iff \left\{ \begin{array}{ccc} \lambda & = & -\frac{1}{3} \\ \mu & = & \frac{1}{3} \end{array} \right.
\end{aligned}$$

La solution du problème de Cauchy (P) est la fonction

$$t \mapsto -\frac{1}{3}e^t + \frac{1}{3}e^{-2t} + 2te^{2t}$$

3.6. **Compléments sur la recherche de solutions particulières.** On considère toujours dans ce paragraphe l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

$$(E) : y'' + ay' + by = c$$

et on rappelle que $b \neq 0$.

Proposition : Solution particulière avec second membre constant.

Si c est une constante, alors l'équation différentielle (E) admet pour solution particulière la fonction constante

$$t \mapsto \frac{c}{b}$$

Cette solution particulière est l'unique équilibre de l'équation différentielle (E).

Proposition : Solution particulière avec second membre polynomial.

Si c est une fonction polynomiale, alors il existe une solution particulière de (E) qui soit également une fonction polynomiale, de même degré que c.

Proposition : Solution particulière avec second membre une exponentielle de polynôme.

On suppose que $c : t \mapsto Q(t)e^{\gamma t}$ où $\gamma \in \mathbb{R}$ et Q est une fonction polynomiale. On rappelle qu'on note $P(X)$ le polynôme caractéristique associé à l'équation différentielle (E). Alors il existe une solution particulière de (E) qui soit de la forme

- $t \mapsto R(t)e^{\gamma t}$ si γ n'est pas racine de $P(X)$
- $t \mapsto tR(t)e^{\gamma t}$ si γ est une racine simple de $P(X)$
- $t \mapsto t^2R(t)e^{\gamma t}$ si γ est une racine double de $P(X)$

où R est une fonction polynomiale de même degré que Q.

Exercice 3.6.1. Déterminer l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 3y' + 2y = 1 + t$
2. $y'' - 3y' + 2y = te^t$
3. $y'' - 4y' + 4y = te^{2t}$
4. $y'' - 4y' + 4y = (-1+t)e^{-t}$
5. $y'' - 2y = e^t$
6. $y'' - 2y = 1 - 2t + 3t^2$

Exercice 3.6.2. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y'' - y' = 0$ de deux manières différentes :

1. En appliquant le théorème du cours sur les équations différentielles linéaires d'ordre 2.
2. En faisant un changement de fonction inconnue pour se ramener à une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Exercice 3.6.3. Soit $(a, b) \in]0, +\infty[^2$. On considère l'équation différentielle logistique (non linéaire)

$$y' = ay - aby^2 \tag{E}$$

1. Déterminer les équilibres de l'équation logistique.
2. Soit f une solution de (E) sur $[0, +\infty[$ qui ne s'annule pas (on admet qu'une telle solution existe).
   - **a.** On pose $z = \dfrac{1}{f}$. Montrer que z satisfait une équation différentielle linéaire puis montrer que, pour tout $t \geqslant 0$, $z(t) = b + (z(0) - b)e^{-at}$.
   - **b.** En déduire que, pour tout $t \geqslant 0$, $f(t) = \dfrac{f(0)}{bf(0) + (1 - bf(0))e^{-at}}$.
3. Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$. Que remarque-t-on ?

4. Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

4.1. Définitions et écriture matricielle.

Définition : Système différentiel.

On appelle **système différentiel linéaire à coefficients constants** toute équation différentielle linéaire de la forme

$$(E) \qquad \begin{cases} x_1' = a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ x_2' = a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n \\ \vdots \\ x_n' = a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n \end{cases}$$

où

- $n \in \mathbb{N}^*$
- les $a_{i,j}$ sont des constantes réelles, appelées **coefficients** du système différentiel
- $x_1, \ldots, x_n$ désignent des fonctions inconnues

On peut réécrire le système différentiel (E) sous la forme

$$X' = AX$$

où $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Remarque 4.1.1. Ici, $X : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$. Ainsi, les solutions du système différentiel linéaire sont des applications à valeurs *vectorielles* (à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ si l'on adopte le point de vue matriciel). On pourra également présenter les solutions sous la forme d'un vecteur ligne $(x_1, \ldots, x_n)$ si l'énoncé nous invite à le faire.

Définition : Points d'équilibre.

On appelle **point d'équilibre** ou **état d'équilibre** du système différentiel $X' = AX$ toute solution constituée de fonctions constantes. On a alors l'équivalence :

$$(x_1, \ldots, x_n) \text{ est un point d'équilibre} \iff A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

Proposition : Points d'équilibre et inversibilité.

La matrice A est inversible si et seulement si l'unique point d'équilibre du système différentiel linéaire $X' = AX$ est le point $(0, \ldots, 0) = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Définition :

On appelle **trajectoire** du système différentiel $X' = AX$ tout ensemble de la forme

$$\{(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n \mid t \in \mathbb{R}\}$$

où $(x_1, \ldots, x_n)$ est une solution du système différentiel $X' = AX$.

Remarque 4.1.2. La trajectoire d'un équilibre est réduite à un point.

Définition :

Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une solution du système différentiel linéaire $X' = AX$. Soit $(\ell_1, \ldots, \ell_n) \in \mathbb{R}^n$. On dit que la trajectoire $\{(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n \mid t \in \mathbb{R}\}$ **converge** vers $(\ell_1, \ldots, \ell_n)$ si, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lim\limits_{t \to +\infty} x_i(t) = \ell_i$. Si il n'existe pas de tel n-uplet $(\ell_1, \ldots, \ell_n)$, alors on dit que la trajectoire **diverge**.

4.2. Résolution dans le cas où la matrice A est diagonalisable.

Théorème : Solution du système différentiel lorsque A est diagonalisable.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable. On note

- α_1, …, α_n les valeurs propres de A (non nécessairement distinctes, chaque valeur propre apparaît autant de fois que la dimension du sous-espace propre associé)
- $(U_1, \ldots, U_n)$ une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, U_i est un vecteur propre associé à la valeur propre α_i

Alors l'ensemble de solutions du système différentiel linéaire $X' = AX$ est

$$\begin{aligned} S_0 &= \left\{t \mapsto \lambda_1 e^{\alpha_1 t} U_1 + \cdots + \lambda_n e^{\alpha_n t} U_n \mid (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n\right\} \\ &= \left\{t \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e^{\alpha_i t} U_i \mid (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n\right\} \\ &= \mathrm{Vect} t \mapsto e^{\alpha_1 t} U_1, \ldots, t \mapsto e^{\alpha_n t} U_n \end{aligned}$$

Remarque 4.2.1. Les solutions sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier et S_0 est un espace vectoriel.

Méthode : Résolution dans le cas diagonalisable.

Résoudre le système différentiel $X' = AX$ dans le cas où A est diagonalisable revient à déterminer les valeurs propres de A et une base de chacun de ses sous-espaces propres. En concaténant chacune de ces bases, on obtient une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.

Définition : Problème de Cauchy pour un système différentiel linéaire.

Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et soit $X^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Résoudre le **problème de Cauchy**

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(t_0) = X^0 \end{cases}$$

c'est trouver les solutions du système différentiel linéaire $X' = AX$ qui vérifient la condition initiale $X(t_0) = X^0$, *i.e.*

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad x_i(t_0) = x_i^0$$

Remarque 4.2.2. On a exprimé le problème de Cauchy à un instant quelconque t_0 plutôt qu'en 0 pour gagner en généralité dans cette partie, mais la plupart du temps on choisit $t_0 = 0$ dans les exos.

Théorème : Existence et unicité d'une solution au problème de Cauchy.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et soit $X^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On considère le problème de Cauchy

$$(P) \qquad \begin{cases} X' = AX \\ X(t_0) = X^0 \end{cases}$$

Il existe une unique solution au problème de Cauchy (P).

Démonstration. On reprend les notations du théorème précédent. On note

$$X : t \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e^{\alpha_i t} U_i$$

une solution générale de $X' = AX$. On a

$$\begin{aligned} X(t_0) = X^0 &\iff \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e^{\alpha_i t_0} U_i = X^0 \\ &\iff \sum_{i=1}^{n} \mu_i U_i = X^0 \qquad \textit{(en posant } \mu_i = \lambda_i e^{\alpha_i t_0}\textit{)} \\ &\iff (\mu_1, \dots, \mu_n) \text{ sont les coordonnées de } X^0 \text{ dans la base } (U_1, \dots, U_n) \end{aligned}$$

Par propriété d'une base, les coordonnées de X^0 dans la base $(U_1, \dots, U_n)$ existent et sont uniques : notons les $(a_1, \dots, a_n)$. Il vient,

$$\begin{aligned} X(t_0) = X^0 &\iff \forall i \in [\![1, n]\!], \quad \lambda_i = a_i e^{-\alpha_i t_0} \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \qquad X(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i e^{-\alpha_i t_0} e^{\alpha_i t} U_i \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \qquad X(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i e^{\alpha_i (t - t_0)} U_i \end{aligned}$$

□

Remarque 4.2.3. Ainsi, résoudre un problème de Cauchy pour un système différentiel linéaire revient à calculer les coordonnées d'un certain vecteur dans une base.

Corollaire :

L'application linéaire

$$\Phi : \left| \begin{array}{ccc} S_0 & \to & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & X(0) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Exemple 4.2.4. Notons $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et résolvons le problème de Cauchy

$$(P) \qquad \begin{cases} X' = AX \\ X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Les valeurs propres de A sont 1 et 3 (on remarque ici que A est diagonalisable car c'est une matrice carrée d'ordre 2 qui possède 2 valeurs propres distinctes). De plus,

- $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1
- $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 3

Ainsi, les solutions générales de $X' = AX$ sont de la forme

$$X : t \mapsto \lambda e^t U + \mu e^{3t} V$$

$$\begin{aligned} X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} &\iff \lambda U + \mu V = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} \lambda & + & \mu & = & 2 \\ -\lambda & + & \mu & = & 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcll} \lambda & + & \mu & = & 2 & \\ & & 2\mu & = & 2 & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rrcll} 2\lambda & & = & 2 & L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2 \\ & 2\mu & = & 2 & \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rrcl} \lambda & & = & 1 \\ & \mu & = & 1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ainsi, l'unique solution du problème de Cauchy (P) est

$$X : t \mapsto e^t U + e^{3t} V$$

i.e., pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$x_1(t) = e^t + e^{3t}$$
$$x_2(t) = -e^t + e^{3t}$$

Théorème : Équilibres stables.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable. On considère le système différentiel linéaire $X' = AX$.

- Si toutes les valeurs propres de A sont négatives ou nulles, alors toutes les trajectoires du système convergent vers un point d'équilibre et on dit que ces points d'équilibres sont **stables**.
- Si A possède au moins une valeur propre strictement positive, alors il existe des trajectoires divergentes.

4.3. **Résolution guidée dans le cas où la matrice A n'est pas diagonalisable.**

Lemme 4.3.1. Soit $X : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ une application dérivable et soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice. Alors l'application $Y = BX$ est dérivable et, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$Y'(t) = BX'(t)$$

Autrement dit,

$$\boxed{(BX)' = BX'}$$

Exercice type concours.

On considère le système différentiel linéaire

$$(E) \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x' & = & x & + & 2y & - & 2z \\ y' & = & -4x & - & 3y & + & 4z \\ z' & = & -2x & & & + & z \end{array} \right.$$

où x, y, z sont trois fonctions inconnues, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

1. On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Définir une matrice A telle que

$$(E) \iff X' = AX$$

2. On note $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et on admet que P est inversible d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que $P^{-1} A P = T$ où T est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

b. On pose $Y = P^{-1}X$. Montrer que $X' = AX \iff Y' = TY$.

3. **a.** Résoudre l'équation différentielle $(\mathscr{E}_1) : \varphi' = \varphi$.

b. Résoudre l'équation différentielle $(\mathscr{E}_2) : \varphi' = -\varphi$.

c. Soit $c \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $t \mapsto cte^{-t}$ est une solution particulière de l'équation différentielle $(\mathscr{E}_3) : \varphi' = -\varphi + ce^{-t}$.

4. On note $Y = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et on suppose que $Y' = TY$. Montrer que α est solution de $(\mathscr{E}_1)$, γ est solution de $(\mathscr{E}_2)$ et β est solution de $(\mathscr{E}_3)$ pour un réel c bien choisi.

5. En déduire que si $X' = AX$, alors il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\begin{cases} x(t) = (\lambda_1 t + \lambda_2 - \lambda_1)e^{-t} \\ y(t) = \lambda_1 e^{-t} + \lambda_3 e^t \\ z(t) = (\lambda_1 t + \lambda_2)e^{-t} + \lambda_3 e^t \end{cases}$$

6. En déduire une solution non stationnaire qui converge vers l'unique état équilibre du système (E).

4.4. **Lien entre système différentiel linéaire et équation différentielle linéaire d'ordre** 2.
On considère une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2
$$(E) \qquad y'' + ay' + by = 0$$
où $b \neq 0$. En posant $X = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$, on obtient l'équivalence
$$(E) \iff X' = AX$$

Calcul du spectre de A.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a
$$\begin{aligned} \lambda \text{ est une valeur propre de } A &\iff A - \lambda I_2 \text{ est non inversible} \\ &\iff \det(A - \lambda I_2) = 0 \\ &\iff \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -b & -a-\lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff \lambda^2 + a\lambda + b = 0 \\ &\iff P(\lambda) = 0 \end{aligned}$$
où $P(X)$ est le polynôme caractéristique associé à l'équation différentielle (E).

Cas où $P(X)$ admet deux racines distinctes r_1 et r_2.
Alors A possède deux valeurs propres distinctes et donc A est diagonalisable. Notons
- $U_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre r_1
- $U_2 = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre r_2

D'après le cours, les solutions générales de $X' = AX$ sont de la forme
$$X : t \mapsto \lambda_1 e^{r_1 t} U_1 + \lambda_2 e^{r_2 t} U_2, \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$
En prenant la première coordonnée, on en déduit que les solutions générales de (E) sont de la forme
$$y : t \mapsto \lambda_1 u_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 u_2 e^{r_2 t}, \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$
et on a retrouvé la formule de première année à condition que $u_1 \neq 0$ et $u_2 \neq 0$.
On a $AU_1 = r_1 U_1$ donc
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ -bu_1 - av_1 \end{pmatrix} = r_1 \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$$
Supposons que $u_1 = 0$. On trouve alors $v_1 = r_1 \times 0 = 0$ et donc $U_1 = 0_{\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$. Cela contredit le fait que U_1 est un vecteur propre.

Cas où $P(X)$ admet une racine double r_0.
Alors A possède une unique valeur propre et donc A n'est pas diagonalisable. Il faut trigonaliser A (cf l'exo de la partie précédente) pour retrouver la formule de première année.

4.5. **Dessins de trajectoires dans le plan : équilibres et convergence.** On considère une matrice $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ diagonale. On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. On a

$$\begin{aligned} X' = AX &\iff \begin{cases} x' = \lambda_1 x \\ y' = \lambda_2 y \end{cases} \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x(t) = x(0)e^{\lambda_1 t} \\ y(t) = y(0)e^{\lambda_2 t} \end{cases} \end{aligned}$$

Remarquons que $x(0) = 0$ si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x(t) = 0$. Plaçons nous dans le cas où $x(0) \neq 0$. On peut alors écrire

$$t = \frac{1}{\lambda_1} \ln \left(\frac{x(t)}{x(0)} \right)$$

ce qui donne, en injectant cette formule dans celle donnant $y(t)$:

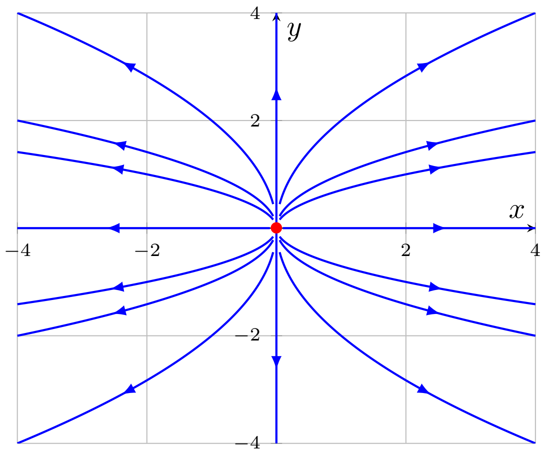
$$y(t) = y(0) \left(\frac{x(t)}{x(0)} \right)^{\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

On peut faire disparaître la dépendance en t pour ne garder que la relation entre y et x (c'est l'équation des trajectoires) :

$$y = y(0) \left(\frac{x}{x(0)} \right)^{\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

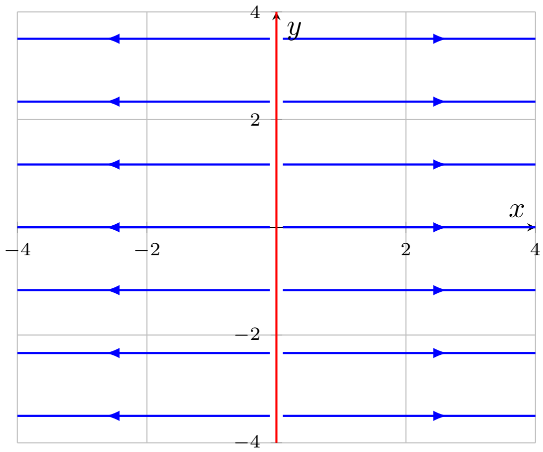
Le dessin des trajectoires dépend du signe des valeurs propres λ_1 et λ_2.

Cas où $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ **:**



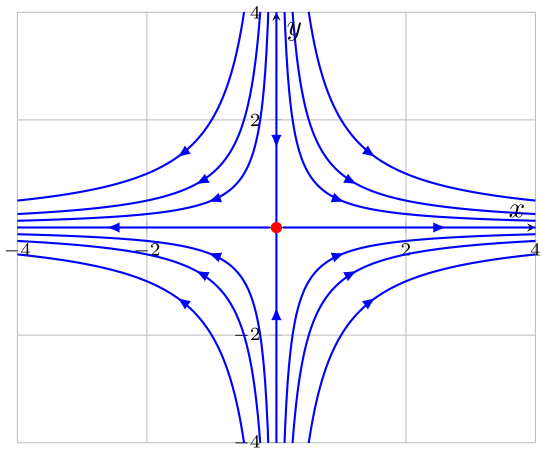
On remarque qu'aucune trajectoire non stationnaire ne converge. L'unique point d'équilibre est instable.

Cas où $\lambda_1 > \lambda_2 = 0$ **:**



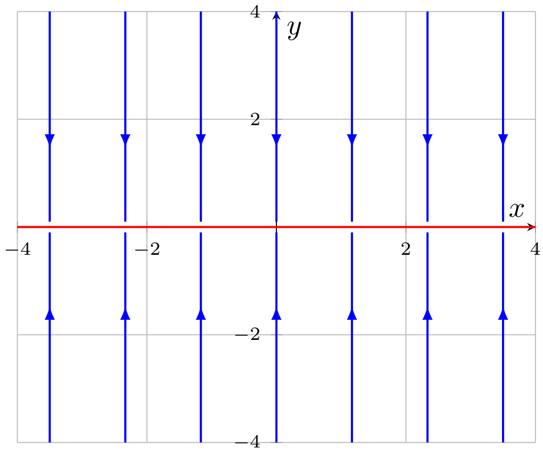
On remarque qu'aucune trajectoire non stationnaire ne converge et qu'il y a une infinité de points d'équilibres (la matrice A n'est pas inversible). Tous les points d'équilibres sont instables.

Cas où $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$ **:**



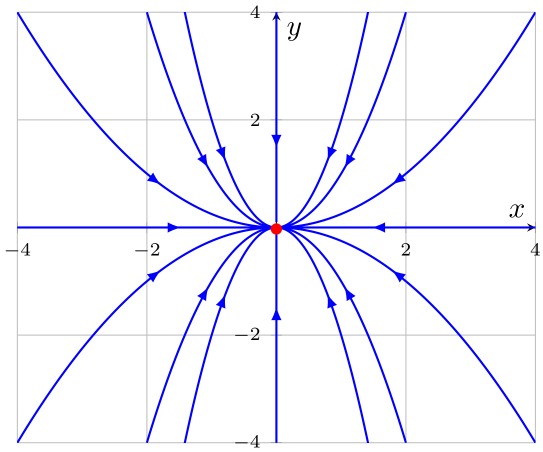
On remarque que la plupart des trajectoires divergent mais que deux trajectoires remarquables convergent vers l'unique point d'équilibre $(0,0)$. On dit dans cette situation que le point d'équilibre est un point selle.

Cas où $\lambda_1 = 0 > \lambda_2$ **:**



On remarque que toutes les trajectoires convergent et qu'il y a une infinité de points d'équilibres (la matrice A n'est pas inversible). Tous les points d'équilibres sont stables.

Cas où $0 > \lambda_1 > \lambda_2$ **:**



On remarque que toutes les trajectoires convergent vers l'unique point d'équilibre (la matrice A est inversible). Ce point d'équilibre est donc stable.

Tableau récapitulatif de la nature des points d'équilibre :

$\lambda_1 \backslash \lambda_2$	$\lambda_2 < 0$	$\lambda_2 = 0$	$\lambda_2 > 0$
$\lambda_1 < 0$	stable	stables	selle
$\lambda_1 = 0$	stables	stables	instables
$\lambda_1 > 0$	selle	instables	instable

Exercice 4.5.1. On considère le système différentiel

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcr} x' & = & x & + & 3y \\ y' & = & x & - & y \end{array} \right.$$

1. Résoudre le système (S).

2. Trouver les états d'équilibre du système (S).

3. Existe-t-il des trajectoires convergentes ? Si oui, en donner une.

4. Justifier que toutes les trajectoires ne sont pas convergentes.

Exercice 4.5.2. On considère le système différentiel

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcr} x' & = & x & + & y \\ y' & = & -2x & - & 2y \end{array} \right.$$

1. Montrer que toutes les trajectoires de (S) sont convergentes.

2. Montrer qu'il existe une infinité d'états d'équilibre associés à (S) et les donner.

3. Résoudre le système (S).

4. Expliciter une trajectoire non constante qui converge vers l'état d'équilibre $(2, -2)$.

Exercice 4.5.3. On considère l'équation différentielle 2×2 suivante :

$$(E) \qquad x''(t) + 5x'(t) + 4x(t) = 0$$

1. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$ possède deux valeurs propres que l'on déterminera, puis donner une base de chacun des sous-espaces propres associés.

2. Résoudre l'équation (E).

Exercice 4.5.4. On considère le système différentiel

$$(S) \qquad \begin{cases} x' &= 3x - y \\ y' &= x + y \end{cases}$$

1. **a.** Justifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ possède une unique valeur propre, que l'on déterminera.

b. En déduire que A n'est pas diagonalisable.

2. **a.** On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.

b. Prouver que $P^{-1}AP$ est une matrice triangulaire T que l'on explicitera.

Pour toute la suite, on note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et on pose $Y = P^{-1}X$.

3. **a.** En notant $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, prouver que : $Y' = P^{-1}X'$.

b. En déduire que : $X' = AX \iff Y' = TY$.

4. **a.** Résoudre l'équation différentielle $v' = 2v$.

b. En déduire les solutions du système $Y' = TY$.

c. Conclure.

5. Sujets d'annales en lien avec ce chapitre.

Ce chapitre est une nouveauté du programme 2022. Il y a donc peu de sujets d'annales qui fasse appelle au matériel que nous venons de voir ici. Un exercice classique consiste en une première partie de réduction d'une matrice et une seconde partie où on étudie le système différentiel associé à la matrice. C'est le cas par exemple du sujet 0 d'ECRICOME pour la session 2023.

1. **ECRICOME**
   - 2023 (sujet 0) Exercice 1.
   - 2024 Exercice 2 (une équation différentielle avec un second membre compliqué).
2. **EDHEC**
   - 2024 Exercice 3 (équation différentielle).
3. **EML**
   - 2023 (sujet 0) Exercice 1.
   - 2024 Exercice 1 1ère partie.
4. **HEC/ESSEC**
   - 2023 épreuve II (au milieu d'autres choses).